

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2023,
Convocatoria extraordinaria

[mentoor.es](https://www.mentoor.es)



Problema 1. Álgebra

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real, se pide:

- Discutir el sistema en función del parámetro a .
- Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

Solución:

- Discutir el sistema en función del parámetro a .

Aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius. Sea A la matriz de coeficientes y A^* la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A :

$$\begin{aligned} |A| &= 2(a(a+2) - 2) - (a+1)(a+2-2) + 1(1-a) \\ &= 2(a^2 + 2a - 2) - (a+1)(a) + 1 - a \\ &= 2a^2 + 4a - 4 - a^2 - a + 1 - a \\ &= a^2 + 2a - 3 \end{aligned}$$

Iguales a cero para encontrar los valores críticos: $a^2 + 2a - 3 = 0$.

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \implies a_1 = 1, a_2 = -3.$$

Caso 1: $a \neq 1$ y $a \neq -3$ $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. Como A^* es de dimensión 3×4 , $\text{Rg}(A^*) = 3$. $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 3 = n^{\circ}$ de incógnitas. El sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

Caso 2: $a = 1$ $|A| = 0 \implies \text{Rg}(A) < 3$. Buscamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, luego $\text{Rg}(A) = 2$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

Las dos primeras columnas son iguales, por lo que el rango no puede ser 3 usando la columna de términos independientes. Estudiamos el menor formado por C_2 , C_3 y C_4 :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(1) - 1(1) + (-1)(1) = 0.$$

Como todos los menores de orden 3 son nulos, $\text{Rg}(A^*) = 2$. $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)**.

Caso 3: $a = -3$ $|A| = 0 \implies \text{Rg}(A) < 3$. Un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, luego $\text{Rg}(A) = 2$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$



Estudiamos el rango de A^* : $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-7) - (-2)(1) + (-1)(4) = -14 + 2 - 4 = -16 \neq 0$.
 $\text{Rg}(A^*) = 3$. Como $\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A^*)$, el sistema es **Incompatible (S.I.)**.

S.C.D. si $a \notin \{1, -3\}$; S.C.I. si $a = 1$; S.I. si $a = -3$.

b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

El sistema es S.C.I. para $a = 1$. Usamos las dos últimas ecuaciones, que son linealmente independientes:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} .$$

Restando la primera de la segunda: $(x + y + 3z) - (x + y + 2z) = 2 - 1 \implies z = 1$.

Sustituyendo $z = 1$ en la primera ecuación: $x + y + 2(1) = 1 \implies x + y = -1$.

Sea $y = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $x = -1 - \lambda$.

La solución para $a = 1$ es: $\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Problema 2. Álgebra

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

- La matriz $M = (A - \alpha I)^2$, donde α es un parámetro real.
- El valor de α , si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula.

Solución:

- La matriz $M = (A - \alpha I)^2$, donde α es un parámetro real.

Primero calculamos $A - \alpha I$:

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3 - \alpha \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $M = (A - \alpha I)^2$:

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3 - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3 - \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & \alpha + \alpha - 2 & 2\alpha + 2 - 6 + 2\alpha \\ \alpha + \alpha - 2 & 1 + \alpha^2 - 2 & 2 + 2\alpha - 6 + 2\alpha \\ -\alpha - 1 + 3 - \alpha & -1 - \alpha + 3 - \alpha & -2 - 2 + (3 - \alpha)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ -2\alpha + 2 & -2\alpha + 2 & \alpha^2 - 6\alpha + 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ -2\alpha + 2 & -2\alpha + 2 & \alpha^2 - 6\alpha + 5 \end{pmatrix}.$$

- El valor de α , si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula.

Igualamos todos los elementos de M a cero:

- $\alpha^2 - 1 = 0 \implies \alpha = \pm 1$.
- $2\alpha - 2 = 0 \implies \alpha = 1$.
- $4\alpha - 4 = 0 \implies \alpha = 1$.
- $-2\alpha + 2 = 0 \implies \alpha = 1$.
- $\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0 \implies (\alpha - 1)(\alpha - 5) = 0 \implies \alpha = 1 \text{ o } \alpha = 5$.

El único valor de α que anula simultáneamente todos los elementos de la matriz es $\alpha = 1$.

La matriz M es nula para $\alpha = 1$.



Problema 3. Geometría

Dados los puntos $A = (2, -1, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ y $C = (-1, 0, 0)$, se pide:

- Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B .
- Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C .
- Calcular la distancia del punto A al plano π .

Solución:

- Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B .

La recta r pasa por $A(2, -1, 0)$ y tiene como vector director $\vec{v}_r = B - A = (1 - 2, 2 - (-1), 3 - 0) = (-1, 3, 3)$.

La ecuación continua de r es:

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z}{3}$$

Para la ecuación implícita, formamos un sistema con dos igualdades:

- $3(x - 2) = -1(y + 1) \implies 3x - 6 = -y - 1 \implies 3x + y - 5 = 0$.
- $3(y + 1) = 3z \implies y + 1 = z \implies y - z + 1 = 0$.

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

- Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C .

El plano π es perpendicular a r , por lo que su vector normal \vec{n}_π es el vector director de r , $\vec{v}_r = (-1, 3, 3)$. La ecuación del plano es de la forma $-x + 3y + 3z + D = 0$.

Como el plano contiene al punto $C(-1, 0, 0)$:

$$-(-1) + 3(0) + 3(0) + D = 0 \implies 1 + D = 0 \implies D = -1.$$

$$\text{La ecuación del plano es } -x + 3y + 3z - 1 = 0.$$

- Calcular la distancia del punto A al plano π .

Usamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano:

$$d(A, \pi) = \frac{|-x_A + 3y_A + 3z_A - 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{|-(2) + 3(-1) + 3(0) - 1|}{\sqrt{1 + 9 + 9}} = \frac{|-2 - 3 - 1|}{\sqrt{19}} = \frac{|-6|}{\sqrt{19}} = \frac{6}{\sqrt{19}}.$$

$$d(A, \pi) = \frac{6\sqrt{19}}{19} \text{ unidades.}$$



Problema 4. Geometría

Dada la recta $r : (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 2)$ y el plano $\pi : 5x + my + z = 2$, se pide:

- Obtener la posición relativa de r y π en función de m .
- Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .

Solución:

- Obtener la posición relativa de r y π en función de m .

De la recta r tenemos un punto $P_r(1, 1, 0)$ y un vector director $\vec{v}_r = (-1, -1, 2)$.

Del plano π tenemos el vector normal $\vec{n}_\pi = (5, m, 1)$.

Estudiamos el producto escalar de los vectores:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-1)(5) + (-1)(m) + (2)(1) = -5 - m + 2 = -m - 3.$$

Caso 1: $-m - 3 \neq 0 \implies m \neq -3$

El vector director de la recta no es perpendicular al vector normal del plano, por lo que la recta y el plano se cortan en un punto (son secantes).

Caso 2: $-m - 3 = 0 \implies m = -3$ El producto escalar es cero, por lo que la recta es paralela al plano o está contenida en él. Para distinguirlo, comprobamos si un punto de la recta, $P_r(1, 1, 0)$, pertenece al plano para $m = -3$. Plano: $5x - 3y + z = 2$. Sustituyendo P_r : $5(1) - 3(1) + 0 = 5 - 3 = 2$. $2 = 2$. La ecuación se cumple, por lo tanto el punto está en el plano.

Si $m \neq -3$, la recta y el plano son secantes. Si $m = -3$, la recta está contenida en el plano.

- Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .

El plano π' que buscamos debe contener a la recta r y ser perpendicular a π (para $m = 1$).

Por contener a r , el plano π' contiene el punto $P_r(1, 1, 0)$ y tiene como uno de sus vectores directores a $\vec{v}_r = (-1, -1, 2)$.

Por ser perpendicular a π , el vector normal de π , $\vec{n}_\pi = (5, 1, 1)$, es otro vector director para π' .

El vector normal del plano buscado, $\vec{n}_{\pi'}$, será el producto vectorial de sus dos vectores directores:

$$\vec{n}_{\pi'} = \vec{v}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1 - 2) - \vec{j}(-1 - 10) + \vec{k}(-1 - (-5)) = (-3, 11, 4).$$

La ecuación del plano π' es $-3x + 11y + 4z + D = 0$. Como pasa por $P_r(1, 1, 0)$: $-3(1) + 11(1) + 4(0) + D = 0 \implies -3 + 11 + D = 0 \implies D = -8$.

El plano es $\pi' \equiv -3x + 11y + 4z - 8 = 0$.



Problema 5. Análisis

Consideramos la función $f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

- Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable.
- Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Obtener $\int f(x)dx$.

Solución:

- Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable.

Factorizamos el numerador y el denominador.

Numerador: $-2x^2 + x + 1 = 0 \implies x = 1, x = -1/2$. Factorización: $-2(x-1)(x+1/2) = -(x-1)(2x+1)$.

Denominador: $2x^2 + 5x + 2 = 0 \implies x = -2, x = -1/2$. Factorización: $2(x+2)(x+1/2) = (x+2)(2x+1)$.

La función es $f(x) = \frac{-(x-1)(2x+1)}{(x+2)(2x+1)}$.

Para $x \neq -1/2$, podemos simplificar: $f(x) = \frac{-(x-1)}{x+2} = \frac{1-x}{x+2}$.

La discontinuidad en $x = -1/2$ es evitable si existe el límite de la función en ese punto.

$$\lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{1-x}{x+2} = \frac{1 - (-1/2)}{-1/2 + 2} = \frac{3/2}{3/2} = 1.$$

Como el límite existe y es finito, la discontinuidad es evitable.

La discontinuidad en $x = -1/2$ es evitable porque el límite existe y vale 1.

- Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Trabajamos con la función simplificada $g(x) = \frac{1-x}{x+2}$ (definida para $x \neq -2, -1/2$).

$$g'(x) = \frac{-1(x+2) - (1-x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{-x-2-1+x}{(x+2)^2} = \frac{-3}{(x+2)^2}.$$

El denominador $(x+2)^2$ es siempre positivo. El numerador es -3 (negativo). Por tanto, $g'(x) < 0$ en todo su dominio. La función es siempre decreciente.

La función es decreciente en todo su dominio: $(-\infty, -2) \cup (-2, -1/2) \cup (-1/2, \infty)$.

- Obtener $\int f(x)dx$.

Integramos la función simplificada:

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x}{x+2} dx &= \int \frac{-(x-1)}{x+2} dx = \int \frac{-(x+2-3)}{x+2} dx = \int \left(-1 + \frac{3}{x+2} \right) dx \\ &= -x + 3 \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

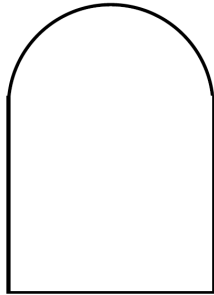
$$\int f(x)dx = -x + 3 \ln|x+2| + C.$$



Problema 6. Análisis

Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros, calcular:

- El área de la ventana en función de su anchura x .
- Las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.
- Calcular el valor de dicha área máxima.



Solución:

- El área de la ventana en función de su anchura x .

Sea x la anchura de la parte rectangular y y su altura. El radio del semicírculo es $r = x/2$.

El perímetro es: $P = x + 2y + \text{longitud del arco} = x + 2y + \frac{1}{2}(2\pi r) = x + 2y + \pi \frac{x}{2} = 20$.

Despejamos y : $2y = 20 - x - \frac{\pi x}{2} \implies y = 10 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}$.

El área es: $A = \text{Área rect.} + \text{Área semic.} = xy + \frac{1}{2}\pi r^2 = x(10 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}) + \frac{\pi}{2}(\frac{x}{2})^2$.

$$A(x) = 10x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = 10x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{8} = 10x - x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$A(x) = 10x - \left(\frac{4 + \pi}{8}\right)x^2.$$

- Las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.

Derivamos el área e igualamos a cero:

$$A'(x) = 10 - 2x\left(\frac{4 + \pi}{8}\right) = 10 - x\left(\frac{4 + \pi}{4}\right)$$

$$A'(x) = 0 \implies 10 = x\left(\frac{4 + \pi}{4}\right) \implies x = \frac{40}{4 + \pi}$$

La segunda derivada $A''(x) = -\left(\frac{4 + \pi}{4}\right) < 0$, confirmando que es un máximo.

Anchura: $x = \frac{40}{4 + \pi}$ metros.

Altura y : $y = 10 - \frac{1}{2}\left(\frac{40}{4 + \pi}\right) - \frac{\pi}{4}\left(\frac{40}{4 + \pi}\right) = 10 - \frac{20}{4 + \pi} - \frac{10\pi}{4 + \pi} = \frac{10(4 + \pi) - 20 - 10\pi}{4 + \pi} = \frac{40 + 10\pi - 20 - 10\pi}{4 + \pi} = \frac{20}{4 + \pi}$.

$$\text{Anchura } x = \frac{40}{4 + \pi} \text{ m, Altura } y = \frac{20}{4 + \pi} \text{ m.}$$

c) Calcular el valor de dicha área máxima.

Sustituimos el valor de x óptimo en la función de área $A(x)$.

$$A = 10\left(\frac{40}{4+\pi}\right) - \left(\frac{4+\pi}{8}\right)\left(\frac{40}{4+\pi}\right)^2 = \frac{400}{4+\pi} - \frac{4+\pi}{8} \frac{1600}{(4+\pi)^2} = \frac{400}{4+\pi} - \frac{200}{4+\pi} = \frac{200}{4+\pi}$$

El área máxima es $\frac{200}{4+\pi} \approx 28.005 \text{ m}^2$.
--

Problema 7. Probabilidad

En una urna hay tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas, todas de igual tamaño.

- a) Se extrae una bola de la urna, se mira el color y se devuelve. Se repite la operación. ¿Cuál es la probabilidad de que el color de las dos bolas sea el mismo? ¿Y de que sean distintos?
- b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de colores distintos?

Solución:

- a) Se extrae una bola de la urna, se mira el color y se devuelve. Se repite la operación. ¿Cuál es la probabilidad de que el color de las dos bolas sea el mismo? ¿Y de que sean distintos?

Total de bolas: $3 + 4 + 5 = 12$.

$$P(V) = \frac{3}{12}, P(R) = \frac{4}{12}, P(A) = \frac{5}{12}.$$

Probabilidad de que sean del mismo color:

$$P(\text{Igual}) = P(VV) + P(RR) + P(AA) = \left(\frac{3}{12}\right)^2 + \left(\frac{4}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{9+16+25}{144} = \frac{50}{144} = \frac{25}{72}.$$

Probabilidad de que sean de distinto color:

$$P(\text{Distinto}) = 1 - P(\text{Igual}) = 1 - \frac{50}{144} = \frac{94}{144} = \frac{47}{72}.$$

$P(\text{Mismo color}) = \frac{25}{72} \approx 0.3472. \quad P(\text{Distinto color}) = \frac{47}{72} \approx 0.6528.$
--

- b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de colores distintos?

Se extraen 3 bolas de distinto color, es decir, una verde, una roja y una amarilla.

$$\text{Casos posibles: } \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220.$$

$$\text{Casos favorables: } \binom{3}{1} \binom{4}{1} \binom{5}{1} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

$$P(3 \text{ distintos}) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{60}{220} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}.$$

$\text{La probabilidad es } \frac{3}{11} \approx 0.2727.$



Problema 8. Probabilidad

Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0.02 y la segunda planta con probabilidad 0.06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0.7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

- La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso.
- Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción.

Solución:

- La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso.

Definimos sucesos: P_1 : de planta 1, P_2 : de planta 2, D : defectuoso.

$$P(P_1) = 0.7 \implies P(P_2) = 1 - 0.7 = 0.3.$$

$$P(D|P_1) = 0.02, P(D|P_2) = 0.06.$$

Buscamos $P(P_2 \cap D)$.

$$P(P_2 \cap D) = P(D|P_2)P(P_2) = (0.06)(0.3) = 0.018.$$

$$\boxed{P(P_2 \cap D) = 0.018.}$$

- Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción.

Buscamos $P(P_1|D)$. Aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(P_1|D) = \frac{P(D|P_1)P(P_1)}{P(D)}$$

Primero, calculamos $P(D)$ con el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P(D|P_1)P(P_1) + P(D|P_2)P(P_2) = (0.02)(0.7) + (0.06)(0.3) = 0.014 + 0.018 = 0.032.$$

Ahora, aplicamos Bayes:

$$P(P_1|D) = \frac{0.014}{0.032} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16} = 0.4375.$$

$$\boxed{P(P_1|D) = 0.4375.}$$